Вестник Донского государственного технического университета. 2020. Т. 20, № 1. С. 15–24. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006
Vestnik of Don State Technical University. 2020. Vol. 20, no. 1, pp. 15–24. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006

МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-1-15-24

Два способа организации скалярного произведения в методе граничных состояний



Д. А. Иванычев
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет» (г. Липецк, Российская Федерация)

Введение. Исследуется влияние двух способов организации скалярного произведения на скорость сходимости решения в энергетическом методе граничных состояний. Основу метода исследования составляют пространства внутренних и граничных состояний, которые сопряжены изоморфизмом. Оба пространства ортонормируются, используя то или иное скалярное произведение. Искомое состояние раскладывается в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса, определяются коэффициенты этой линейной комбинации. Различие двух способов заключается в назначении скалярных произведений и вычислении коэффициентов Фурье.
Материалы и методы. Применительно к методу граничных состояний предложена новая теория организации скалярного произведения в пространствах внутренних и граничных состояний. Построены вычислительные алгоритмы ее практической реализации. В традиционном (первом) способе в качестве ортогонализатора в пространстве внутренних состояний используется внутренняя энергия упругого деформирования. Здесь коэффициенты Фурье представляют собой работу заданных сил на базисных векторах перемещения точек границы. В исследуемом (втором) способе скалярные произведения представляют собой интегралы от перекрестных произведений базисных векторов сил на границе. Соответственно коэффициенты Фурье вычисляются как интегралы произведения заданных сил на границе тела на базисные векторы сил.
Результаты исследования. Проведено численное исследование первой основной осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного цилиндра при отсутствии и при наличии массовых сил. При отсутствии массовых сил анализ упругих полей, полученных при одинаковом числе используемых базисных элементов, показал, что второй способ имеет наибольшую точность результатов. При наличии массовых сил второй способ не показал эффективности в плане единственности решения, однако он вполне пригоден для построения множества упругих полей, используемых в решении более сложных задач.
Обсуждение и заключения. Полученные результаты могут быть использованы в решении краевых задач механики не только анизотропного, но и изотропного тела. При решении более сложных задач, таких как контактные и смешенные, вопрос о скорости сходимости требует отдельного исследования.

Ключевые слова: метод граничных состояний, скалярное произведение, внутренняя энергия, пространства состояний, первая основная задача, массовые силы.

Образец для цитирования*:* Иванычев, Д. А. Два способа организации скалярного произведения в методе граничных состояний / Д. А. Иванычев // Вестник Донского государственного технического университета. — 2020. — Т. 20, № 1. — С.15−24. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-1-15-24

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "р_а".



Two ways of organizing scalar product in the boundary state method

D. A. Ivanychev
Lipetsk State Technical University (Lipetsk, Russian Federation)

Introduction. The influence of two ways of organizing scalar product on the convergence rate of the solution in the energy method of boundary states is considered. The method is based on the spaces of internal and boundary states which are conjugated through isomorphism. Both spaces are orthonormalized using one scalar product or another. The desired

state is expanded in the Fourier series according to the elements of the orthonormalized basis; and the coefficients of this linear combination are determined. The two methods differ in the assignment of scalar products and the calculation of the Fourier coefficients.
Materials and Methods. In relation to the method of boundary states, a new theory of organizing a scalar product in the spaces of internal and boundary states is proposed. Computational algorithms are constructed for its practical implementation. In the traditional (first) approach, the internal energy of elastic deformation is used as an orthogonalizer in the space of internal states. Here, the Fourier coefficients are the work of given forces on the basis vectors of displacement of the boundary points. In the studied (second) approach, scalar products are integrals of the cross products of the basis force vectors at the boundary. Accordingly, the Fourier coefficients are calculated as integrals of the product of the given forces at the body boundary by the basic force vectors.
Results. A numerical study of the first primal axisymmetric problem of the elasticity theory for a transversely isotropic cylinder in the absence and presence of mass forces is conducted. In the absence of mass forces, an analysis of the elastic fields obtained for the same number of used basic elements has shown that the second method has the greatest accuracy of the results. Under solving the problem with the presence of mass forces, the second method did not show efficiency in terms of the uniqueness of the solution; however, it is quite suitable for constructing a multitude of elastic fields used to solve more complex problems.
Discussion and Conclusions. The results obtained can be used to solve boundary-value problems of mechanics of not only an anisotropic body, but also an isotropic one. When solving more complex problems, such as contact and mixed ones, the issue of the rate of convergence requires a separate study.

Keywords*:* boundary state method, scalar product, internal energy, state spaces, the first main task, mass forces.

For citation: D. A. Ivanychev. Two ways of organizing scalar product in the boundary state method. Vestnik of DSTU, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 15−24. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2020-20-1-15-24

Funding information: The study was carried out with the financial support of RFBR and the Lipetsk Region as part of the research project No. 19-41-480003 "p_a".

Введение. Краевые задачи теории упругости в механике достаточно изучены, поэтому в последние годы проводятся исследования частного направления. Например, рассмотрена осесимметричная первая основная задача для полуполосы [1], решение которой строится в виде разложений по системам функций Фадля-Папковича и имеет явный вид. Предлагается общий метод решения первой основной задачи теории упругости для прямолинейно-анизотропного тела в случае плоской деформации [2]. Используются замкнутые системы краевых задач, схожих с задачами Гильберта, что позволяет добиться большей общности метода. Методом конечных элементов на основе вариационного принципа Кастильяно решены плоские изотропные задачи [3]. Это позволило получить поля напряжений на сетках достаточно низкой размерности, в том числе для несжимаемых материалов. Решаются контактные задачи о внедрении эллиптических штампов в трансверсально-изотропное упругое полупространство [4].

Метод граничных состояний при решении краевых задач для анизотропных тел также нашел свое применение. Например, рассмотрено упругое равновесие трансверсально-изотропного цилиндра под действием осесимметричных поверхностных сил [5]. Исследуются задачи кручения протяженных цилиндров из материала с анизотропией общего вида [6]. Показана математическая модель получения явных параметрических решений для изотропных и анизотропных тел [7, 8], где константы среды в качестве параметров включены в упругие поля. Разработана методика решения задач теории упругости средствами компьютерной алгебры [9]. В решении задач напряженно-деформированной неограниченной упругой среды, содержащей сферические полости или включения, при разных условиях применен метод граничных состояний [10].

В настоящей работе исследуются два подхода к назначению скалярного произведения в «теле» метода граничных состояний. При этом проводится тестирование каждого состояния на примере решения первой основной задачи теории упругости. В каждой задаче удерживается одинаковое число используемых элементов и оценивается уровень погрешности.

Материалы и методы. Метод граничных состояний (МГС) [11] является энергетическим, в нем применяется фундаментальная теория рядов для решения основных задач механики. В качестве опорных используются понятия внутренних и граничных состояний. Внутреннее состояние ξ обусловлено набором вектора перемещений **u**, тензора деформаций ε и тензора напряжений Т:

$$\xi = \{u, \varepsilon, T\}. \qquad (1)$$

Граничное состояние обусловлено набором вектора перемещений точек границы u^v и усилий **p** на границе тела:

$$\gamma = \{u^v, p\}.$$

Совокупность таких состояний образует базисы пространств внутренних $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_k, ...\}$ и граничных $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_k, ...\}$ состояний. Далее проводится ортогонализация базисов состояний, где в качестве ортогонализатора в базисе граничных состояний используется выражение:

$$(\xi_i, \xi_j) = \int_V \varepsilon_i T_j dV,$$

в базисе граничных состояний — выражение:

$$(\gamma_i, \gamma_j) = \int_S u_i^v p_j dS. \qquad (2)$$

Каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимнооднозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. В случае первой основной задачи искомые внутреннее и граничное состояния представляет собой ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \ \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k, \qquad (3)$$

здесь c_k — коэффициенты Фурье:

$$c_k = \int_S p u_k dS, \qquad (4)$$

где p — вектор заданных поверхностных сил; u_k — вектор перемещения в *k*-ом базисном элементе базиса внутренних состояний. При этом базисные наборы формируются на основании общего или фундаментального решения задачи.

Первые общие решения уравнения Ламе линейной теории упругости были построены еще в 30-е годы прошлого столетия. Уравнение Ламе — это уравнение движения (в рассматриваемом случае — равновесия) Эйлера:

$$\nabla T + f = 0,$$

где T — тензор напряжений; ∇ — оператор Гамильтона, действующий как дивергенция; f — массовые силы.

В уравнении Ламе тензор напряжений T в соответствии с законом Гука представлен через тензор деформаций ε. В свою очередь тензор деформаций в соответствии с соотношением Коши представлен через вектор перемещений u. В общих решениях уравнения Ламе вектор перемещения определяется: в теории изотропной упругости через гармонический вектор B и гармонический скаляр, в теории анизотропной упругости — через функцию напряжений F.

Вектор B (функция F) может быть представлен в виде ряда по базисным векторам $B_k = B_k(\alpha^i)$ — функциям координат α^i. В результате каждому гармоническому базисному вектору B_k (функции F_k) будут поставлены в соответствие следующие базисные элементы:

- вектор перемещения u_k;
- тензор деформаций ε_k;
- тензор напряжений T_k;
- вектор массовых сил f_k (из уравнений равновесия);
- вектор поверхностных сил (из фундаментального соотношения Коши):

$$p_k = nT_k,$$

где *n* — внешняя единичная нормаль к поверхности тела.

По перечисленным базисным элементам соответствующие векторы или тензоры разлагаются в ряды Фурье с одинаковыми коэффициентами c_k, которые определяются из условий ортогональности базисных функций. Например, для первой основной задачи при отсутствии массовых сил, когда на всей поверхности тела *S* заданы внешние силы p и осуществлена ортогонализация базисных векторов p_k ($\int_S p_i p_j dS = \delta_{ij}$ — дельта Кронекера), коэффициенты c_k определяются из выражения:

$$c_k = \int_S p\, p_k dS \,. \tag{5}$$

Это выражение вытекает из представления:

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_k \,.$$

Таким образом, исследуется способ формирования решения с помощью выражения для скалярных произведений в базисе граничных состояний:

$$(\gamma_i, \gamma_j) = \int_S p_i p_j dS \tag{6}$$

и выражения для коэффициентов Фурье (5).

В случае второй основной задачи имеют место зависимости:

$$(\gamma_i, \gamma_j) = \int_S u_i^v u_j^v dS \,;$$

$$c_k = \int_S u\, u_k^v dS \,,$$

где u — заданный вектор перемещения точек границы тела; u_k^v — вектор перемещения в k-ом базисном элементе базиса граничных состояний.

Результаты исследования. Параметры скорости сходимости рядов и точности результата рассмотрим на примере решения задачи об упругом равновесии трансверсально-изотропного цилиндра из темно-серого алевролита [12] в безразмерном виде (рис. 1).

Граничные условия:

$$p = 0,\ S_1 \big|\ z = -2,\ 0 \le r \le 1 \,;$$

$$p = 0,\ S_2 \big|\ z = 2,\ 0 \le r \le 1 \,;$$

$$p_r = 4 - z^2,\ p_z = 0,\ S_3 \big|\ r = 1,\ -2 \le z \le 2 \,.$$

<…>

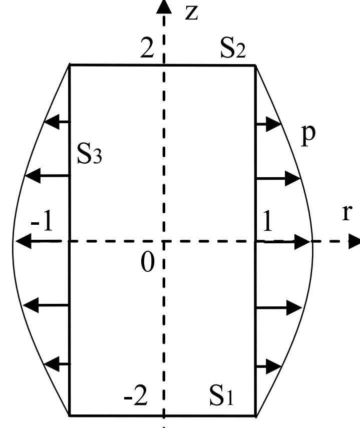


Рис. 1. Граничные условия для транстропного цилиндра

Подробно методика решения первой основной задачи традиционным способом с помощью скалярного произведения (2) приведена в работе [6]. Базис внутренних состояний (1) строится следующим образом:

- используя общее решение задачи о плоской деформации [13], конструируются базисные наборы плоских вспомогательных состояний;
- по формулам перехода определяются базисные наборы пространственных осесимметричных состояний;
- проводится ортонормирование базиса внутренних состояний по матричному алгоритму Грама-Шмидта с использованием скалярного произведения (2);
- из ортонормированного базиса внутренних состояний редуцируется ортонормированный базис граничных состояний;
- вычисляются коэффициенты Фурье (4) и строятся ряды (3) в развернутом виде (индекс k помещен наверх):

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k \,;\ p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k \,;\ \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k \,;\ \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k \,.$$

Опустим информацию о полях характеристик напряженно-деформированного состояния, полученных при одном и другом способе назначения скалярного произведения, и приведем лишь основные результаты. При этом назовем традиционный подход, используемый в [11], как первый способ решения задачи, а подход, использующий скалярное произведение (6) и коэффициенты Фурье (5), как второй способ. Точность решения при удержании одинакового числа базисных элементов у второго способа выше. На рис. 2 для каждого способа приведено сопоставление полученных граничных условий (ГУ) с заданными при использовании 8-ми значений коэффициента Фурье. Усилия изображены в масштабе, например, истинное значение p_r на первом графике рис. 2 равно значению на графике, умноженному на коэффициент κ .

<…>

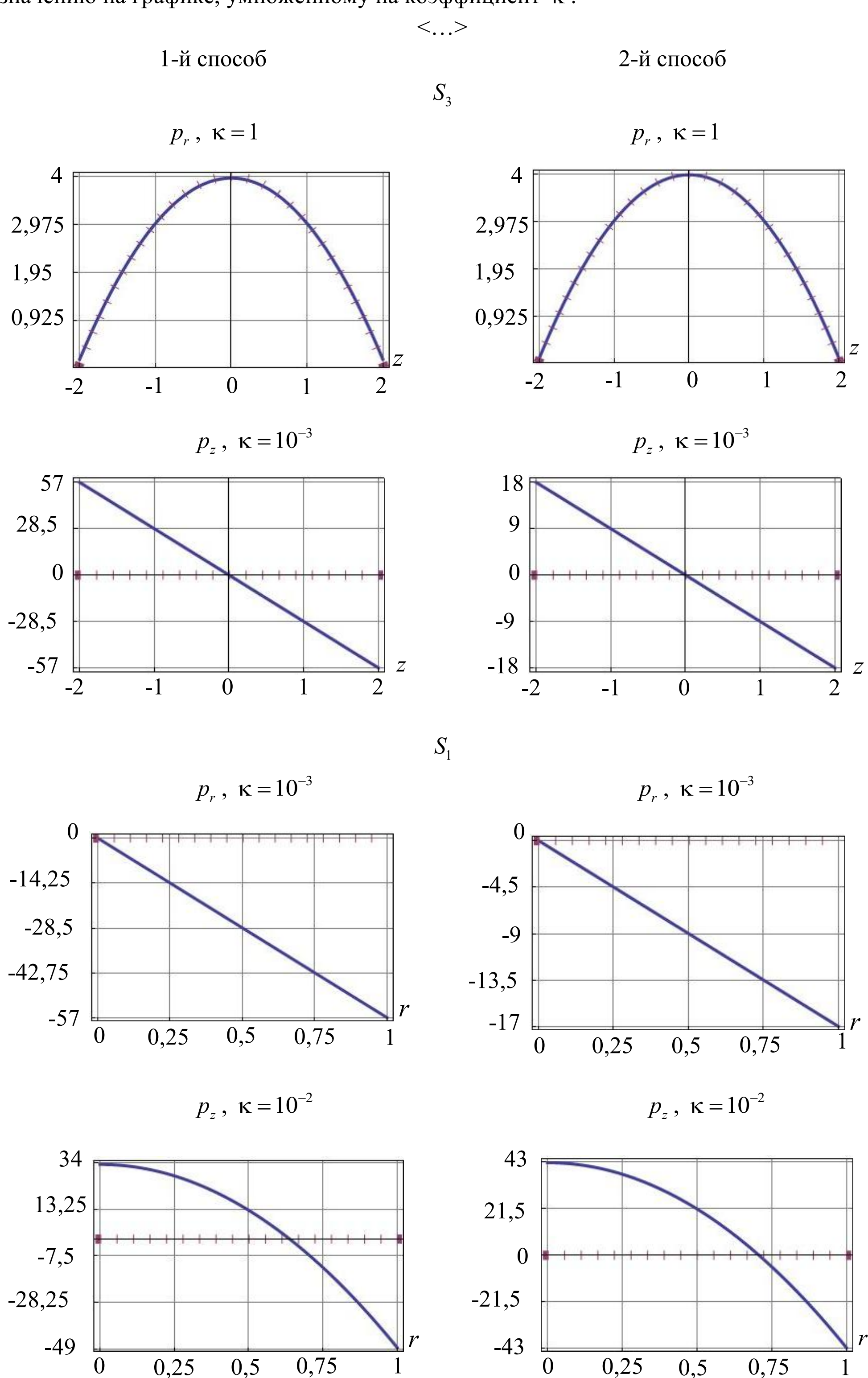


Рис. 2. Верификация ГУ для цилиндра при 8-ми элементах базиса

Эта тенденция сохраняется и при увеличении числа используемых элементов базиса. Для 61-го элемента верификация граничных условий представлена на рис. 3 (приведено сравнение силы p_z на участке границы S_3). Если оценивать погрешность как максимальное отклонение полученной величины от заданной, то во втором способе погрешность меньше.

<…>

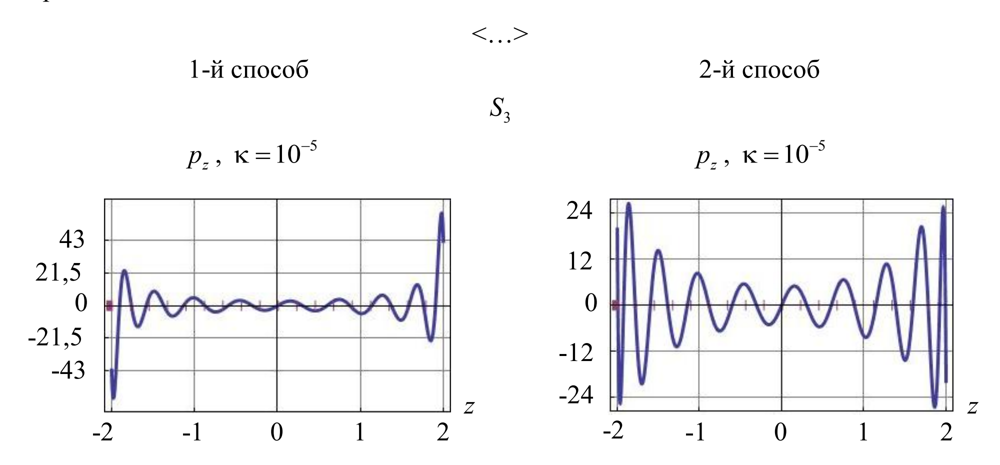


Рис. 3. Верификация ГУ для цилиндра при 61-м элементе базиса

Далее исследуем точность решения для трансверсально-изотропного тела вращения неканонической формы (рис. 4). Граничные условия:

$$p = 0,\ S_1 \cup S_2;$$

$$p_r = 0, p_z = 0{,}25,\ S_3 \big|\ z = 1,\ 0 \le r \le 1;$$

$$p_r = 0, p_z = -1,\ S_4 \big|\ z = -1,\ 0 \le r \le 0{,}5.$$

<…>

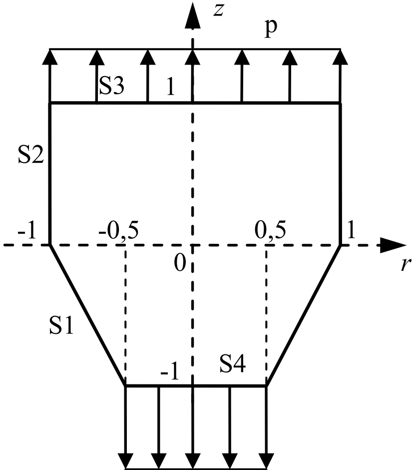


Рис. 4. Граничные условия для тела вращения

Удержано 15 элементов базиса. На рис 5. представлено сравнение граничных условий для каждого способа (показаны не все участки границы и компоненты вектора сил).

<…>

1-й способ — 2-й способ

S_4

p_z, $\kappa = 1$ — p_z, $\kappa = 1$

-0,71; -0,82; -0,95; -1; -1,07; -1,13; r; 0; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5

-0,91; -0,94; -0,96; -0,99; -1; r; 0; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5

S_3

p_z, $\kappa = 10^{-2}$ — p_z, $\kappa = 10^{-2}$

33; 30,2; 27,5; 24,7; -22; r; 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1

28; 26,7; 25,5; 24,2; -23; r; 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1

S_1

p_r, $\kappa = 10^{-2}$ — p_r, $\kappa = 10^{-2}$

22; 15,75; 9,5; 3,2; -3; r; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875; 1

6,1; 4,15; 2,2; 0,25; -1,7; r; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875; 1

Рис. 5. Верификация ГУ для тела вращения

Как видно из графиков, для тела более сложной формы отличие в скорости сходимости наблюдается в пользу второго способа. Рассмотрим задачи с участием массовых сил. Последовательность формирования решения следующая:

1. Задается зависимость вектора перемещения плоского вспомогательного состояния от координат $y^{\alpha} z^{\beta}$ и на его основе определяется вектор перемещения пространственного осесимметричного состояния.

2. Для такого вектора определяются параметры:

- тензор деформаций по соотношению Коши;
- тензор напряжений из закона Гука;
- усилия на поверхности тела из фундаментального соотношения Коши;
- массовые силы из уравнения равновесия.

3. Строится точное частное решение задачи, соответствующее заданной в каждой точке тела функции перемещения.



4. Перебирая $\alpha+\beta\le n$ (n = 1, 2, 3 …), строится множество точных частных решений задачи линейной теории упругости для параметров:

- векторы перемещения u_k;
- тензоры деформаций ε_k;
- тензоры напряжений T_k;
- векторы поверхностных сил $p_k = n\cdot T_k$;
- векторы массовых сил X_k.

5. Формируются базисы пространств внутренних $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,...,\xi_k,...\}$ и граничных $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...,\gamma_k,...\}$ состояний, в которых соблюдаются равенства:

$$\xi_k=\{u_k,\varepsilon_k,T_k\},$$

$$\gamma_k=\{u_k^v,p_k,X_k\}.$$

6. Оставляем среди этих решений только линейно независимые и осуществляем их ортогонализацию в соответствии со скалярными произведениями в базисах внутренних и граничных состояний:

$$(\xi_i,\xi_j)=\int_V \varepsilon_{ij}^{(i)}\sigma_{ij}^{(j)}dV,$$

$$(\gamma_i,\gamma_j)=\int_S p_i^{(i)}u_{vi}^{(j)}dS+\int_V X_i^{(i)}u_i^{(j)}dV$$

(индексы *i* и *j*, отвечающие за номера элементов, помещены наверх и заключены в скобки).

7. В результате получаем базис, по которому соответствующие векторы или тензоры разлагаются в ряды (3) с одинаковыми коэффициентами:

$$c_k=\int_V X\,u_k dV+\int_S p\,u_k^v dS,$$

где X — вектор заданных массовых сил.

Исследуем возможность построения упругого поля при наличии массовых сил, используя соотношения (6) и (5). Рассмотрим первую основную задачу с неуравновешенными усилиями для трансверсально-изотропного цилиндра (рис. 6). Граничные условия:

$$p=0,\ S_1\cup S_3;$$

$$p_r=0, p_z=r^2,\ S_3\big|\ z=2,\ 0\le r\le 1.$$

<…>

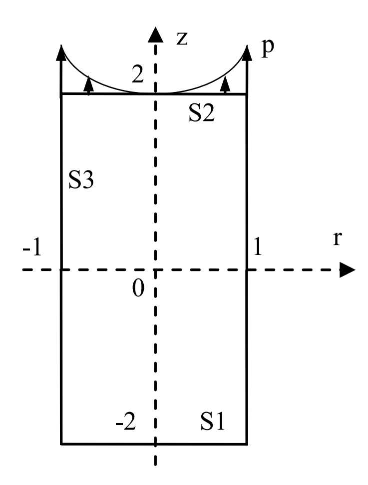


Рис. 6. Граничные условия для цилиндра

Выражения для ортонормированного базисного набора компонент вектора перемещения $u=\{u,w\}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ортонормированный базисный набор компонент вектора перемещения

	u	w
ξ_1	0	$0,1213z$
ξ_2	$0,0788r$	$-0,1126z$
ξ_3	0	$0,0331z^2$
ξ_4	$0,0592rz$	$-0,0268z^2$
ξ_5	$-0,02rz$	$0,0975r^2+0,009z^2$
ξ_6	$0,1535r$	$-0,9163z+0,0691z^3$
ξ_7	$-0,2896r+0,0724rz^2$	$1,2067z-0,1005z^3$
ξ_8	$1,8629r-0,4824rz^2$	$-8,2447z+0,4824r^2z+0,6701z^3$
ξ_9	$0,0908rz$	$-0,0454r^2-0,4347z^2-0,0511z^4$
ξ_{10}	$-0,1757rz+0,0439rz^3$	$-0,0195r^2+0,3661z^2-0,0457z^4$
ξ_{11}	$0,2881rz-0,0804rz^3$	$-0,144r^2-0,7209z^2+0,1206r^2z^2+0,0837z^4$

<…>

Для получения строгого решения потребовалось 11 коэффициентов Фурье, ненулевые значения: $c_1=0,2178$; $c_2=-0,1226$; $c_3=0,2377$; $c_4=-0,0732$; $c_5=0,0247$; $c_8=0,1443$; $c_{11}=0,1443$. Приведем выражения для перемещений и массовых сил (удержано 4 знака после запятой):

$$u=0,2592\,r+0,0367\,rz-0,0696\,rz^2-0,0116\,rz^3;$$

$$w=-0,0183\,r^2-1,1497z+0,0696\,r^2z-0,094z^2+;$$

$$+0,0174\,r^2z^2+0,0967z^3+0,0121z^4;$$

$$R=-0,2814\,r-0,1407\,rz;\ Z=1,2012-0,25\,r^2-3,6038z-0,9z^2.$$

Если построить базис внутренних состояний через плоские вспомогательные состояния, образованные с помощью монома $z^{\alpha}y^{\beta}$, то ортонормированный базис и коэффициенты Фурье изменятся. В этом случае решение окажется тоже строгим и примет вид:

$$u=0,0363\,r-0,0913\,rz+0,0309\,r^3z-0,0287\,rz^2;$$

$$w=0,0456\,r^2-0,0077\,r^4-0,4148z+0,0287\,r^2z+0,0257z^2+0,0399z^3;$$

$$R=-2,0145\,r-1,6178\,rz;\ Z=-0,25\,r^2-1,4893\,z.$$

Аналогично можно получить другие частные решения задачи, используя при формировании базиса полиномы разного вида, например, $z^{\alpha}y^{\beta}+z^{\alpha}$ и др.

Исследуемый подход позволяет получить множество решений одной краевой задачи теории упругости при наличии массовых сил. Подвержены перемещения и массовые силы, сочетания которых дают распределение напряжений, удовлетворяющих на границе заданным силам. Первый способ лишен этой особенности, т. к. в нем массовые силы входят в состав заданных условий и задача состоит только в отыскании поля перемещений.

Обсуждение и заключения. Второй способ решения задачи обладает наилучшей сходимостью. Кроме того, в отличие от первого способа при вычислении скалярных произведений в процессе ортогонализации и при определении коэффициентов Фурье, во втором способе не используются деформации и перемещения. Здесь формируется базисный набор напряжений и его след на границе — базисный набор поверхностных сил, с помощью которых проводится ортогонализация и построение рядов. Это означает, что при вычислении скалярных произведений не возникает погрешность, связанная с составляющими, отвечающими за жесткое перемещение, которое может возникать при формировании базиса [11].

Если рассматриваются задачи с массовыми силами, то второй способ может оказаться полезным при формировании множества частных решений, напряжения которых удовлетворяют определенным условиям на границе. Эти решения могут быть использованы в качестве базисных в более сложной задаче, а также быть полезными при определении упругих полей, реализуемых от фиктивных нагрузок, возникающих в результате применения метода Пуанкаре [7, 8].

Проанализирована точность решения задач теории упругости методом граничных состояний при использовании разных подходов в построении скалярных произведений. Решение задачи линейной теории упругости, использующее представление общего решения уравнения Ламе в виде ряда Фурье по базисным функциям и выражение (6) в качестве ортогонализатора этих функций, имело наилучшую сходимость.

Библиографический список

1. Гоголева, О. С. Примеры решения первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе (симметричная задача) / О. С. Гоголева // Вестник Оренбургского государственного университета. — 2012. — № 9(145). — С. 138–142.

2. Володченков, А. М. Об одном методе решения первой основной задачи теории упругости для однородного анизотропного тела / А. М. Володченков, А. В. Юденков // Universum: Технические науки. — 2015. — № 6(18). — С. 1–9. — URL : http://7universum.com/ru/tech/archive (дата обращения : 07.12. 2019).

3. Суходолова, Ю. С. О конечном элементе на основе вариационного принципа Кастильяно для плоских задач теории упругости / Ю. С. Суходолова, Н. А. Труфанов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2012. — № 1. — С. 168–178.

4. Пожарский, Д. А. Сравнение точных решений контактных задач для трансверсально изотропного полупространства / Д. А. Пожарский, Д. Б. Давтян // Вестник Донского государственного технического университета. — 2015. — № 15(1). — С. 23–28. DOI: https://doi.org/10.12737/10371.

5. Иванычев, Д. А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел / Д. А. Иванычев // Вести вузов Черноземья. — 2014. — № 1. — С. 19–26.

6. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length / D. A. Ivanychev [et al.] // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. — 2019. — Vol. 10, iss. 2. — P. 183–191. DOI: https://doi.org/10.14456/ITJEMAST.2019.18.

7. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations / V. B. Penkov [et al.] // Journal of Physics: Conf. Series. — 2018. — Vol. 973, iss. 012015. — 10 p. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012015.

8. An algorithm for analytical solution of basic problems featuring elastostatic bodies with cavities and surface flaws / V. B. Penkov [et al.] // Journal of Physics: Conf. Series. — 2018. — Vol. 973, iss. 012016. — 11 p. DOI: https://doi.org/ 10.1088/1742–6596/973/1/012016.

9. Using computer algebra to construct analytical solutions for elastostatic problems / V. B. Penkov [et al.] // Journal of Physics: Conf. Series. — 2019. — Vol. 1203, iss. 012020. — 12 p. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012020.

10. Penkov, V. B. The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions / V. B. Penkov, L. V. Satalkina, A. S. Shulmin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2014. — Vol. 78, iss. 4. — P. 384–394. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.12.010.

11. Пеньков, В. Б. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики / В. Б. Пеньков, В. В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. — 2001. — Т. 2, № 2. — С. 115–137.

12. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела. / С. Г. Лехницкий. — Москва : Наука, 1977. — 416 с.

13. Александров, А. Я. Пространственные задачи теории упругости / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. — Москва : Наука, 1978. — 464 с.

Сдана в редакцию 13.01.2020
Запланирована в номер 09.03.2020

Об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич, доцент кафедры «Общая механика» ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет», (398055, РФ, г. Липецк, ул. Московская, 30), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7736-9311, Lsivdmal @mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.